BIURO DZIEKANÓW
Wpłynęło dnia 29.12.2021 r.

Rzeszów, 23 grudnia 2021 r.

dr hab. Jacek Chudziak, prof. UR
Instytut Matematyki
Uniwersytet Rzeszowski

Recenzja pracy doktorskiej Pani mgr Renaty Malejki

„Stabilność uogólnień równania Frécheta"

Przedstawiona rozprawa doktorska została przygotowana w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie pod opieką naukową prof. dra hab. Janusza Brzdęka (promotor główny) i dra Zbigniewa Leśniaka (promotor pomocniczy).

1. Struktura rozprawy

Rozprawa liczy 73 strony i jest podzielona na pięć rozdziałów:

1. Stabilność w sensie Ulama
2. Stabilność uogólnionego równania Frécheta
3. Stabilność na zacieśnionej dziedzinie
4. Rozwiązania
5. Zastosowania i przykłady

Rozdziały pierwszy i piąty są podzielone na dwa podrozdziały, zaś rozdział trzeci na trzy podrozdziały. Bibliografia liczy 59 pozycji. Rozdział pierwszy ma charakter wprowadzający w tematykę pracy. Autorka prezentuje w nim podstawowe pojęcia i fakty z zakresu stabilności równań funkcyjnych oraz omawia niektóre znane wyniki powiązane z tematyką rozprawy. W kolejnych czterech rozdziałach zostały przedstawione główne wyniki pracy.

2. Charakterystyka głównych wyników rozprawy

Jak już wcześniej wspomniałem, główne wyniki rozprawy są zamieszczone w rozdziałach II-V. Rozdział drugi, opracowany w oparciu o wyniki zawarte w pracy:

- Bahyrycz A., Brzdęk J., Jabłońska E., Malejki R., Ulam's stability of generalization of the Fréchet functional equation, J. Math. Anal. Appl. 442 (2) (2016), 537–553,

poświęcony jest problemowi stabilności uogólnionego równania Frécheta

$$F(x_1 + ... + x_s) = \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(F(p_i(x_1, ..., x_r))) \quad \text{dla} \quad x_1, ..., x_r \in X, \tag{1}$$

gdzie l, s, r są ustalonymi dodatnimi liczbami całkowitymi, $(X, +)$ jest grupą przemienną, Y jest przestrzenią Banacha nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, funkcje $\Gamma_1, ..., \Gamma_l : Y \to Y$, $p_1, ..., p_l : X^r \to X$ oraz $D : X^r \to Y$ są dane, zaś $F : X \to Y$ jest szukaną funkcją. Głównym wynikiem tego rozdziału jest twierdzenie 2.1. Jego dowód w znacznej mierze oparty jest na zastosowaniu twierdzenia 1.1. Dalsze rezultaty zostały przedstawione w postaci wniosków z twierdzenia 1.2. Dotyczą one m.

in. stabilności niejednorodnych wersji równania (1) (wnioski 2.1 i 2.3), hiperstabilności równania (1) (wniosek 2.2) oraz charakteryzacji przestrzeni unitarnych (wnioski 2.4 i 2.5).

W rozdziale trzecim zbadany został problem stabilności równania

$$(2)\quad A_1F(x+y+z)+A_2F(x)+A_3F(y)+A_4F(z)=A_5F(x+y)+A_6F(x+z)+A_7F(y+z)$$

na zacieśnionej dziedzinie. Główne rezultaty tego rozdziału przedstwiono w twierdzeniach 3.1, 3.3 i 3.4 odnoszących się do przypadków, odpowiednio,:

- $A_2+A_3+A_4\neq 0$,
- $A_1+A_2+A_3\neq 0$,
- $A_6+A_7-A_2-A_3\neq 0$.

Do głównych wyników tej części rozprawy należy także zaliczyć twierdzenie 3.5 oraz wynikające z niego wnioski 3.3 i 3.4 dotyczące, odpowiednio, hiperstabilności równania (2) i charakteryzacji przestrzeni unitarnych. Dowody twierdzenia 3.1 oraz twierdzeń 3.3-3.5 opierają na podobnych schematach, w których kluczową odgrywa twierdzenie 1.1. Wyniki zamieszczone w tym rozdziale pochodzą z artykułów:

- Brzdęk J., Leśniak Z., Malejki R., On the generalized Fréchet functional equation with constant coefficients and its stability, Aequationes Math. 92 (2018), 355–373,
- Brzdęk J., Leśniak Z., Malejki R., On the stability of a generalized Fréchet functional equation with respect to hyperplanes in the parameter space, Symmetry 13 (3) (2021), art. ID 384, 21 pages

  oraz
- Malejki R., Stability of a generalization of the Fréchet functional equation, Ann. Univ. Pedagog. Crac. Stud. Math. Math. 14 (2015), 69–79.

Rozdział czwarty, oparty na rezultatach pochodzących z prac:

- Bahyrycz A., Brzdęk J., Jabłońska E., Malejki R., Ulam's stability of generalization of the Fréchet functional equation, J. Math. Anal. Appl. 442 (2) (2016), 537–553

  oraz
- Brzdęk J., Leśniak Z., Malejki R., On the generalized Fréchet functional equation with constant coefficients and its stability, Aequationes Math. 92 (2018), 355–373,

dotyczy postaci rozwiązań równań (2) oraz

$$(3)\qquad f(x+y+z)=a_1f(x)+a_2f(y)+a_3f(z)+a_4f(x+y)+a_5f(x+z)+a_6f(y+z).$$

Twierdzenie 4.1, będące głównym wynikiem tego rozdziału, podaje warunek dostateczny na to, aby każde rozwiązanie równania (2), spełniające warunek $F(0)=0$, było funkcja addytywną.

W rozdziale piątym przedstawione zostały zastosowania oszacowań uzyskanych w twierdzeniach 3.3 i 3.4. Szczególną uwagę poświęcono przypadkowi, gdy funkcja kontrolna jest postaci

$$L(x,y,z)=||x||^p+||y||^p+||z||^p \quad \text{dla} \quad x,y,z\in X,$$

gdzie $(X,||\cdot||)$ jest przestrzenią unormowaną, zaś p jest ustaloną dodatnią liczbą rzeczywistą.

3. Ogólna ocena pracy

Wyniki przedstawione w rozprawie w naturalny sposób wpisują sie w nurt badań nad problemem stabilności równań funkcyjnych. Ich poziom merytoryczny nie budzi zastrzeżeń. Natomiast pewną słabością pracy jest fakt, że dowody większości twierdzeń przebiegają według tego samego schematu, prowadzącego do zastosowania twierdzenia 1.1. Według mnie na etapie redakcji można (i warto) było wyodrębnić pewne części wspólne rozumowań występujących w dowodach,

sformułować je w postaci lematów, a następnie odwoływać się do nich w odpowiednich fragmentach dowodów. Uwaga ta dotyczy m. in. monotoniczności operatora Λ, oszacowań (3.23), (3.43) i (3.62), zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n \varepsilon(x)$, czy też indukcyjnych dowodów nierówności (3.25), (3.45) i (3.64).

Poza wynikami dotyczącymi stabilności uogólnień równania Frécheta, na uwagę zasługują rezultaty podające postać rozwiązań równań (2) i (3), a w szczególności twierdzenie 4.1.

Rozprawa napisana jest w sposób przejrzysty, a poszczególne fragmenty rozumowań są z reguły precyzyjnie uzasadniane. Występujące w pracy usterki są szczegółowo omówione w dalszej części recenzji.

W mojej ocenie istotną kwestią jest fakt, że zdecydowana większość wyników przedstawionych w rozprawie pochodzi z czterech prac naukowych, przy czym tylko w jednym przypadku Pani mgr Malejki jest jedyną autorką artykułu. Wobec tego, wskazane byłoby w miarę prezyzyjne określenie wkładu autorki w pozostałe trzy prace. Na podstawie informacji zawartych w rozprawie nie sposób tego rozstrzygnąć.

4. Uwagi szczegółowe

Przejdę teraz do szczegółowego omówienia usterek występujących w pracy.

1. Na s. 16 w wierszach 2-3, zamiast $L_i(x)$ powinno być A_i (dwukrotnie).

2. Na s. 21, w wierszach 4-5, powinno być:

„ ... (z liczbą $\chi = -1$). Ponadto, dla zbioru $\mathcal{M}$ postaci (2.23), tj.

$$\mathcal{M} := \{\mu_m \in \varepsilon_X : m \in (K, \infty) \cap \mathbb{Q}\},''$$

.

3. Na s. 25 warto wyraźnie określić, że chodzi o następujące przypadki:

przypadek (I) $A_2 + A_3 + A_4 \neq 0$,

przypadek (II) $A_1 + A_2 + A_3 \neq 0$, itd.

4. Na s. 26, w (3.13) zamiast f powinno być F.

5. Na s. 29, w (3.24) i (3.25) oraz w wierszach 10 i 8 od dołu, powinno być ,, $x \in D \setminus \{0\}''$.

6. Na s. 31, w wierszu 17, zamiast „(3.17)" powinno być „(3.18)".

7. Na s. 32 komentarz przed twierdzeniem 3.2 nie jest precyzyjnie sformułowany. Założenia twierdzenia 3.2 nie wykluczają sytuacji, w której $(X, +)$ jest grupą i $0 \in D$. Wobec tego, nie jest jasne jaka jest różnica między twierdzeniem 3.1 a twierdzeniem 3.2.

8. Na s. 33, w tytule podrozdziału powinno być: „Przypadki (II) i (V)". Ponadto, w wierszu 2 od dołu powinno być: „pozostałe przypadki: (III), (IV), (VI) i (VII)".

9. Na s. 35, w wierszach 5-3 od dołu, zamiast „b" powinno być „d".

10. Na s. 38, w wierszach 16-17 powinno być: „ ... F jest jedynym rozwiązaniem równania (2) spełniającym (3.50)".

11. Na s. 45, w drugim zdaniu dowodu twierdzenia 3.5 zamiast „równanie (2)" powinno być „nierówność (3.74)". Ponadto (3.77) ma błędną postać.

12. Na s. 50, w ostatnim wierszu, zamiast „β_k" powinno być „β_m".

13. Na s. 55-57, termin „Propozycja" jest niefortunny.

14. Na s. 58, dowód twierdzenia 4.1 należy rozpocząć od założenia, że $A_i \neq A_j$ dla pewnych $i, j \in \{1, ..., 7\}$.

15. Na s. 59, w ostatnim zdaniu dowodu twierdzenia 4.1 zamiast „jeśli $A_1 \neq A_2$" powinno być „ponieważ $A_1 \neq A_2$". Brak wzmianki o tym, że skoro $A_1 = A_3 = A_5 = A_7$ i $A_2 = A_4 = A_6$ oraz, z założenia, nie wszystkie współczynniki są równe, to $A_1 \neq A_2$.

16. Wniosek 4.5 warto krótko uzasadnić, podobnie jak stwierdzenie na na s. 60, w wierszach 13-11 od dołu.

17. W dowodzie wniosku 5.1 korzysta się z propozycji 4.2 i twierdzenia 4.1. Pierwszego z tych wyników wymaga założenia (4.7). Warto uzasadnić dlaczego jest ono spełnione.

18. Na s. 64, w rozumowaniu przedstawionym w wierszach 1-5 korzysta się z wniosku 5.2. Nie jest jasne dlaczego pominięty został parametr β_0, który w tym przypadku ma wartość $\frac{5}{12}$.

19. Argumenty przedstawione w podrozdziale 5.2 warto ująć w formie oddzielnych uwag lub przykładów. Wówczas rozważania będą bardziej przejrzyste.

20. Odwołując się do wcześniejszych wyników, mówimy o „twierdzeniu" („wniosku"), a nie o „Twierdzeniu" („Wniosku").

5. **Konkluzja**

Rozprawa doktorska Pani magister Renaty Malejki zawiera szereg wyników dotyczących problemu stabilności uogólnień równania Frécheta oraz postaci rozwiązań takich równań. Zarówno poziom merytoryczny wyników zamieszczonych w rozprawie, jak i sposób ich prezentacji nie budzą zastrzeżeń. Wymienione przeze mnie usterki nie wpływają w sposób istotny na ocenę merytorycznej zawartości rozprawy. Uważam, że spełnia ona zarówno zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim, jak również wymagania ustawowe.

Jak już wspomiałem wcześniej, większość wyników przedstawionych w rozprawie pochodzi z czterech artykułów naukowych, przy czym tylko w jednym przypadku Pani Malejki jest jedyną autorką pracy. W mojej ocenie wskazane byłoby więc jasne określenie wkładu autorki w pozostałe trzy artykuły. Na podstawie informacji zawartych w rozprawie nie jestem w stanie rozstrzygnąć tej kwestii.

Podsumowując, **wnioskuję o dopuszczenie Pani magister Renaty Malejki do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**