Stabilność uogólnień równania Frécheta

Renata Malejki

Streszczenie

Rozprawa doktorska ''Stabilność uogólnień równania Frécheta'' poświęcona jest stabilności w sensie Ulama równania funkcyjnego wielu zmiennych postaci

$$F(x_1 + \ldots + x_s) = \sum_{i=1}^{l} \Gamma_i(F(p_i(x_1, \ldots, x_r))) + D(x_1, \ldots, x_r) \tag{1}$$

w klasie funkcji $F : X \to Y$, gdzie funkcje $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l : Y \to Y$, $D : X^r \to Y$ i $p_1, \ldots, p_l : X^r \to X$ są dane, $(X, +)$ jest grupą przemienną, $\mathbb{K}$ jest ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub zespolonych $\mathbb{C}$, Y jest przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$ oraz l, r, s są ustalonymi dodatnimi liczbami całkowitymi, dla których zachodzi nierówność $s \leqslant r$.

Rezultaty bardziej szczegółowe dotyczą stabilności, hiperstabilności oraz rozwiązań pewnych szczególnych przypadków tego równania postaci

$$A_1F(x+y+z)+A_2F(x)+A_3F(y)+A_4F(z) = A_5F(x+y)+A_6F(x+z)+A_7F(y+z), \tag{2}$$

gdzie $A_1, \ldots, A_7$ są stałymi z ciała $\mathbb{K}$. Pokazane są także zastosowania tych wyników w charakteryzacji przestrzeni unitarnych.

Temat stabilności równań funkcyjnych poruszył po raz pierwszy w 1940 roku Stanisław Ulam. Obecnie mówi się, że równanie funkcyjne jest stabilne w sensie Ulama, jeżeli przy pewnych założeniach istnieje rozwiązanie dokładne (często jedyne) tego równania, blisko zadanego rozwiązania przybliżonego. Natomiast równanie funkcyjne jest hiperstabilne, jeżeli przy pewnych założeniach rozwiązanie przybliżone tego równania jest jego rozwiązaniem dokładnym.

Praca jest podzielona na pięć rozdziałów. Główne rezultaty pracy przedstawione są w rozdziale drugim i dotyczą stabilności w sensie Ulama równania funkcyjnego wielu zmiennych postaci (1), które jest uogólnieniem znanego równania funkcyjnego Frécheta, tj. równania (2) dla $A_1 = \ldots = A_7 = 1$.

Wyniki w tym rozdziale zostały udowodnione m.in. w oparciu o twierdzenie o punkcie stałym (dla przestrzeni funkcyjnych), przy założeniu warunku Lipschitza dla odwzorowań Γ_i. Rozwiązanie dokładne F tego równania otrzymano jako punkt stały odpowiednio zdanego operatora działającego na przestrzeni funkcji i została oszacowana odległość pomiędzy zadanym rozwiązaniem przybliżonym, a wyznaczonym rozwiązaniem dokładnym.

Zostały też podane przykłady funkcji kontrolnej, dla których są spełnione odpowiednie założenia wykorzystywane w tej sytuacji. Pokazano również, że przy dodatkowych założeniach dotyczących takiej funkcji kontrolnej, uzyskuje się hiperstabilność rozważanego równania.

Bardziej szczegółowe rezultaty, zawarte w kolejnych rozdziałach, dotyczą stabilności w sensie Ulama równań funkcyjnych postaci (2), będących szczególnymi przypadkami równania wielu zmiennych postaci (1). Motywacją do ich uzyskania było naturalne

pytanie o zależność stabilności równania (2) od współczyników $A_1, ..., A_7$, występujących w tym równaniu i zbadanie tego problemu dla możliwie szerokiego zakresu wartości tych współczynników na zacieśnionej dziedzinie, przy możliwie najsłabszych założeniach o przestrzeni X.

W rozdziale czwartym tej pracy przedstawiona została także postać rozwiązań równania (2), oczywiście wyłączając przypadek trywialny, gdy wszystkie współczynniki są równe (gdy są równe, ale różne od zera, otrzymujemy równanie Frécheta, którego rozwiązania są znane). Rozwiązania te są w postaci sumy funkcji addytywnej, kwadratowej i stałej. W niektórych sytuacjach (m.in. w zależności od wartości współczyników $A_1, ..., A_7$) są po prostu funkcjami addytywnymi. Główny rezultat tego rozdziału, mówiący o tym, że każde rozwiązanie równania (2) jest funkcją addytywną otrzymany został przy założeniach, że pewne dwa współczynniki równania są różne od siebie i rozwiązanie zeruje sie w zerze. Bez założenia warunku zerowania się w zerze, to rozwiązanie jest w postaci sumy funkcji addytywnej i stałej.

Ostatni, piąty rozdział zawiera proste przykłady ilustrujace wczesniejsze wyniki. Bibliografia składa się z 59 pozycji.