dr hab. Maciej Ulas, prof. UJ
Instytut Matematyki UJ
Łojasiewicza 6
30-348 Kraków
email: maciej.ulas@uj.edu.pl

Kraków, 16 sierpnia 2022 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej
Konfiuracje prostych i grupy symetrii autorstwa Pana mgr. Marka Janasza

Przedmiotem niniejszej recenzji jest rozprawa doktorska pt. *Konfiguracje prostych i grupy symetrii* przygotowana przez mgr. Marka Janasza. Promotorem pracy jest prof. dr hab. Tomasz Szemberg, zaś promotorem pomocniczym jest dr Grzegorz Malara. Przedstawiona praca została napisana w języku polskim i liczy 67 stron. Składa się ze Wstępu, spisu oznaczeń, siedmiu rozdziałów oraz bibliografii liczącej 50 pozycji.

Problematyka poruszana w pracy wpisuje się w aktualny nurt badań dotyczący konfiguracji prostych (ogólniej hiperpłaszczyzn) i ich związków z szeregiem otwartych pytań dotyczących tzw. problemu zawierania. Dokładniej, tematyka ta łączy metody algebry, kombinatoryki i geometrii algebraicznej i w naturalny sposób staje się narzędziem do badania ogólnego problemu dotyczącego charakteryzacji tych par liczb całkowitych (m, r), dla których $I^{(m)} \subset I^r$, gdzie I jest ideałem pierścienia $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, k jest ciałem, zaś $I^{(m)}$ jest potęgą symboliczną ideału I. Wiadomo, że jeśli $m \geq nr$, to $I^{(m)} \subset I^r$, co jest konsekwencją badań Eina, Lazarsfelda, Smitha oraz Hochstrea i Huneke. Harbourn i Huneke sformułowali mocniejszą hipotezę, która mówi, że $I^{(m)} \subset I^r$ dla $m \geq nr - n + 1$. Hipoteza ta okazała się fałszywa już w przypadku $n = r = 2$ i $m = 3$. Co więcej, okazuje się, że odpowiednia konfiguracja prostych może być użyta do konstrukcji ideału I, dla którego zachodzi $I^{(3)} \not\subseteq I^2$. Na analizie warunku $I^{(3)} \not\subseteq I^2$ dla szczególnych układów prostych skupia się mgr Janasz w przedstawionej pracy.

Przejdę teraz do omówienia zawartości poszczególnych rozdziałów rozprawy.

Rozdział 1 ma charakter wstępny i przedstawiono w nim podstawowe pojęcia i wyniki, z których korzysta się w kolejnych rozdziałach.

W Rozdziale 2 pojawia się pojęcie konfiguracji symplicjalnej oraz szereg wyników dotyczących zachowania się liczby punktów osobliwych odpowiednich krotności takich układów. Nowy wynik mówi, że dla układów symplicjalnych zawierających $d \geq 6$ prostych, zachodzi nierówność $\sum_{r \geq 2} t_r \geq \frac{3}{2}d - 2$.

Rozdział 3 zawiera katalog kontrprzykładów na zawieranie $I^{(3)} \subset I^2$ i pochodzących od konfiguracji symplicjalnych. Autor zaprezentował dwie strategie, których zostały użyte do konstrukcji kontrprzykładów. To czego mi brakuje w tym rozdziale, to informacji o tym, które z przedstawionych kontrprzykładów są znane, a które są nowe, tzn. nie ma ich w literaturze. Poza tym, w kontekście konfiguracji $\mathcal{A}(27, 1)$ (na stronie 29, linia -26) brakuje informacji o stopniu generatorów w minimalnej bazie ideału $I(U_\alpha)$. Co to znaczy? Czy obliczenia, które są konieczne do wyznaczenia interesujących nas obiektów są zbyt skomplikowane (czasochłonne)? Jako wniosek z przeprowadzonych obliczeń autor dowodzi, że dla dowolnego $n \in \{15, \ldots, 27\}$ istnieje taka realizacja $\mathcal{A}_0$ konfiguracji symplicjalnej $\mathcal{A}(n, k)$, że $(I(B))^{(3)} \not\subseteq (I(B))^2$, gdzie B jest odpowiednio wybranym podzbiorem $\mathrm{Sing}(\mathcal{A}_0)$.

W Rozdziale 4 bada się zagadnienia związane z filtracjami prostych. Głównym wynikiem tego rozdziału jest twierdzenie mówiące, że każda konfiguracja należąca do rodziny $\mathcal{A}(12k+7)$ jest induktywnie wolna. Warto zwrócić uwagę, że klasa konfiguracji prostych $\mathcal{A}(12k+7), k = 1, 2, \ldots,$ jest obiektem znanym, wprowadzonym w pracy Artésa, Grünbauma i Llibre. Dowód tego twierdzenia ma charakter indukcyjny, a otrzymany wynik jest potem wykorzystany do konstrukcji induktywne wolnej konfiguracji $\mathcal{A}(31,3)$ dla której $(J(\mathcal{A}(31,3)))^{(3)} \not\subseteq (J(\mathcal{A}(31,3)))^2$. Rezultat ten daje negatywna odpowiedź na pytanie sformułowane przez Drabkina i Seceleanu. Pytali oni, czy induktywna wolność układu $\mathcal{A}$ hiperpłaszczyzn implikuje zawieranie $(J(\mathcal{A}))^{(2r-1)} \subseteq (J(\mathcal{A}))^r, r \geq 2$. Wynik zawarty w pracy pokazuje, że już dla $r = 2$ takie zawieranie nie zachodzi. W tym kontekście interesujące jest, że przeprowadzając inaczej konstrukcję konfiguracji 31 prostych można otrzymać przykład na zachodzenie (!) zawierania $(J(\mathcal{A}))^{(3)} \subseteq (J(\mathcal{A}))^2$. Pokazuje to, że nawet tak mocne założenie jak induktywna wolność konfiguracji nie gwarantuje spełnienia któregokolwiek z warunków $(J(\mathcal{A}))^{(3)} \subseteq (J(\mathcal{A}))^2, (J(\mathcal{A}))^{(3)} \not\subseteq (J(\mathcal{A}))^2$.

Rozdział 5 poświęcony jest analizie tzw. sporadycznych układów prostych. Cuntz przedstawił katalog takich układów, które zawierają co najwyżej 27 prostych. Analizując postać takich układów, autor wykazuje, że sporadyczna symplicjalna konfiguracja prostych jest niemal wolna, wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $\mathcal{A}(17,6)$. Zwracam uwagę, że sformułowanie Twierdzenia 5.7 może być mylące, gdyż w jego wypowiedzi mamy warunek wtedy i tylko wtedy, ale nie ma informacji o tym, że rozważamy układy zawierające co najwyżej 27 prostych (pełna charakteryzacja sporadycznych symplicjalnych układów prostych nie jest znana). Powstaje ciekawe pytanie, czy któryś ze znanych sporadycznych układów symplicjalnych zawierających więcej niż 27 prostych jest niemal wolny.

Rozdział 6 zawiera katalog jawnych realizacji sporadycznych konfiguracji symplicjalnych. Otrzymane realizacje zdefiniowane są nad ciałem liczb wymiernych lub skończonym rzeczywistym rozszerzeniem algebraicznym ciała liczb wymiernych.

Ostatni rozdział, nazwany Dodatek, zawiera bardzo krótkie omówienie procedur programu `Singular`, który był kluczowy przy prowadzonych obliczeniach i nie zawiera nowego materiału.

Jeszcze kilka słów o redakcji pracy. Rozprawa jest ilustrowana dobrze przemyślanymi przykładami, które ilustrują pojawiające się pojęcia i/lub twierdzenia. Język pracy jest dobry. Jednakże, jak zwykle przy tekstach tej długości, trudno uniknąć drobnych błędów językowych, czy tzw. literówek. I tak, nie bardzo podoba mi się używanie słowa *poset* (pojawiając się pierwszy raz na stronie 8, linia 17), które ma bardzo dobry odpowiednik polski: *zbiór częściowo uprządkowany*. Co ciekawe, to drugie określenie pojawia się cztery linijki dalej, w sformułowaniu Twierdzenia 1.7. Niemniej, w dalszej części pracy, autor trzyma się słowa poset. Na stronie 8, linia 21, pojawia się również sformułowanie *skończenie atomistyczną*, ale powinno ono brzmieć *skończenie atomową*. Dodam jeszcze kilka drobnych literówek, które udało mi się wychwycić:

- str. 11, linia 9: brak kropki po definicji modułu jakobianowego $N(f)$;
- str. 25, linia 6: inicjał imienia i nazwisko M. Cuntza pisane jest kursywą (a nie powinno być);
- str. 30, linia -5: nie ma słowa *wielowskaźnik*, jest słowo *wielowskaźnik*.

Rzecz jasna, są to drobiazgi i nie wypływają one na zawartość merytoryczną oraz czytelność pracy.

Wyniki zawarte w pracy w istotny sposób polegają na obliczeniach symbolicznych. Pomimo tego, że w pracy jest niewiele wyników stricte teoretycznych zawiera ona sporo interesującego materiału, którego niemożliwym jest otrzymanie bez intensywnych obliczeń numerycznych i symbolicznych. Podejście to umożliwiło podanie zarówno kontrprzykładów (jak i przykładów)

na zachodzenie zawierania $I^{(3)} \subseteq I^2$ dla odpowiednich ideałów stowarzyszonych z konfiguracją symplicjalną prostych, jak i dać negatywną odpowiedź na otwarte pytanie dotyczące problemu zawierania dla pewnych układów induktywnie wolnych. To czego brakuje mi w pracy, to dyskusji dotyczącej skali problemów natury obliczeniowej, które trzeba pokonać by posunąć naszą wiedzę dalej (abstrahuję tutaj od postępu w wiedzy teoretycznej). Tylko w jednym miejscu (na stronie 31) wspomniano o czasie wykonania procedury koniecznej do wyznaczenia elementów Tabeli 3.2. Warto by mieć podobną informację dla pozostałych twierdzeń, których dowody opierają się na obliczeniach symbolicznych.

Uważam, że pomimo przedstawionych uwag krytycznych, przedstawiona rozprawa spełnia ustawowe (por. art. 13 ust. 1 Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym) i zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim. Podsumowując: praca poszerza naszą dotychczasową wiedzę dotyczącą geometrii i kombinatoryki układów prostych i wnoszę o dopuszczenie Pana mgr. Marka Janasza do dalszych etapów przewodu doktorskiego.