Prof. dr hab. Maciej Sablik
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Śląskiego
ul. Bankowa 14
40-007 Katowice

Katowice, 18 września 2022 r.

Ocena rozprawy doktorskiej pana mgr. Sebastiana Wójcika
na temat **„Zastosowania równań i nierówności funkcyjnych w teorii użyteczności”**

1. Uwagi dotyczące zawartości merytorycznej.

Oceniana rozprawa dotyczy, zgodnie z tytułem, zastosowania równań i nierówności funkcyjnych w teorii użyteczności. Teoria użyteczności, wprowadzona bodaj przez Johna von Neumanna i Oskara Morgensterna w ich „biblii” ekonomii matematycznej *Theory of Games and Economic Behavior*, w której rozpatrywali relację preferencji i pokazali, że pod pewnymi założeniami można taką relację scharakteryzować przy pomocy funkcji U, zwanej funkcją użyteczności. Dokładniej U jest określona na zbiorze alternatyw $\mathcal{X}$ i spełnia równoważność (1.1) (tutaj i w dalszym ciągu odwołuję się do numeracji w ocenianej rozprawie). W istocie Morgenstern i von Neumann stworzyli model zwany teorią użyteczności oczekiwanej (*expected utility theory*), gdzie $U : L^\infty(S, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}$ jest postaci (1.2), zaś $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest rosnącą funkcją ciągłą, zwaną funkcją użyteczności Bernoulliego. Dowodzi się, że u jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do przekształcenia afinicznego.

Funkcje użyteczności odgrywają więc doniosłą rolę w ekonomii. Jeszcze bardziej widoczna jest ich rola w matematyce ubezpieczeniowej. Jak piszą Newton L. Bowers jr. i in. w pozycji [6] (str. 10), jeśli $G \geqslant H \geqslant \mu$, gdzie G oznacza maksymalną kwotę, którą ubezpieczający jest gotów zapłacić za ryzyko poniesienia straty X, H jest minimalną składką, którą gotów jest przyjąć ubezpieczyciel za polisę na tę samą stratę, zaś $\mu = \mathbb{E}(X)$ jest oczekiwaną stratą średnią, to kontrakt jest możliwy. Powyższą nierówność uzyskuje się korzystając z nierówności Jensena i biorąc pod uwagę funkcje użyteczności klienta i ubezpieczyciela, które są rosnące, ciągłe i wklęsłe. Można by powiedzieć, że tak jak w znanej piosence „money makes the world go round” tutaj „utility makes the insurance possible”.

W istocie, to właśnie wyznaczaniem składek czyli wyceną kontraktów ubezpieczeniowych Autor przedłożonej rozprawy zajmuje się w ciągu całej pracy. W Rozdziale 1.3 podaje najbardziej popularne składki (netto, wartości oczekiwanej, wariancji, odchylenia standardowego czy wykładniczą) - te składki są wyznaczane w oderwaniu od funkcji użyteczności. Natomiast przy użyciu funkcji użyteczności z odpowiednich równań wyznacza się składkę (z punktu widzenia klienta) (por. (1.10) - *składka wartości średniej*, (1.12) - składka w modelu oczekiwanej użyteczności rang (*rank-dependent utility model*), czy (1.13) - składka w modelu skumulowanej perspektywy (*cumulative*

prospect theory); dotychczas zajmowano się tą tematyką (por. bibliografia). Są również wyliczone składki z punktu widzenia ubezpieczyciela (składka równoważnej użyteczności (1.14), składka w modelu oczekiwanej użyteczności rang (1.15), czy wreszcie zdefiniowaną przez M. Kałuszkę i M. Krzeszowca składkę równoważnej użyteczności w modelu skumulowanej perspektywy (1.16). Wreszcie Autor podaje też definicję tzw. *składki szwajcarskiej* (1.18). Wszystkie te składki były badane w warunkach ryzyka, czyli jak to ujmuje Autor, pod założeniem istnienia przestrzeni probabilistycznej i traktowania ubezpieczanego zdarzenia jako pewnej zmiennej losowej. Natomiast w sytuacji, gdy wymagamy jedynie istnienia monotonicznej funkcji zbioru, czyli tzw. *pojemności* (ang. capacity). Jak Autor sam pisze, wycena kontraktów ubezpieczeniowych w warunkach niepewności nie była dotąd systematycznie badana (wyjątki cytowane przez mgr. Wójcika to prace [51] oraz [65]).

W Rozdziale 1 Autor wprowadza też pojęcie tzw. równoważnika pewności. Jest to w istocie pewna średnia, a nawet uogólnienie średniej quasi-arytmetycznej, która była i jest szeroko badana w teorii równań funkcyjnych. W Rozdziale 4 Doktorant dowodzi wyników charakteryzujących funkcje użyteczności, dla których równoważnik pewności lub odpowiadająca mu składka jest jednorodna lub translatywna. Dla średnich quasi-arytmetycznych takie wyniki charakteryzujące ich generatory były zawarte np. książce J. Aczéla z J. Dhombresem *Functional Equations in Several Variables* Cambridge University Press, Cambridge, 1989 (szkoda, że ta pozycja nie jest cytowana w rozprawie). Istotnym osiągnięciem Autora jest wszelako wykazanie, że jednorodność (lub translatywność) dla wszystkich zmiennych losowych z rodziny $\mathcal{X}$ jest równoważna analogicznej wlasności dla zmiennych dwuwartościowych, czyli należących do rodziny $\mathcal{X}^2$. To pozwala „przetłumaczyć" wspomnianą własność na równania funkcyjne, które Autor rozwiązuje, wyznaczając w ten sposób odpowiednie funkcje użyteczności. Taka jest w zasadzie idea, stojąca za wynikami odnoszącymi się do składek obliczanych z punktu widzenia klienta (nawiasem mówiąc, nie jestem pewien, czy nie należałoby rozróżnić tego typu składek od pozostałych, np. oznaczając symbolami G, $G_{(u,w)}$ czy $G_{(u,w,\mu,\nu)}$ - to jednak jest tylko taka uwaga na marginesie). Jednak mimo że idea jest czytelna, to Autor stosuje ją w odniesieniu do bardzo ogólnych wielkości, zależnych od pojemności μ i ν. Oczywiście, wymaga to drobiazgowych i przeprowadzonych w rozprawie rozumowań, ponieważ tutaj mamy do czynienia z operatorami agregacji $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}_\mu$ i $\mathbb{E}_{(\mu,\nu)}$, gdzie te ostatnie są całkami Choqueta względem pojemności μ i ν.

Składki drugiego rodzaju (z punktu widzenia ubezpieczyciela) są rozpatrywane przez mgr. Wójcika w Rozdziale 5. Tutaj już nie można „wyliczyć"

na ogół składki $H_{(u,\mu,\nu)}$. Da się jednak wykazać, że jeśli para (μ,ν) spełnia warunek (2.15), to istnieje dokładnie jedna taka liczba $H_{(u,\mu,\nu)}$, że spełniony jest warunek (5.2), czyli liczba ta jest składką zerowej użyteczności. Również w tym przypadku dowodzone są różne własności składki, w szczególności Twierdzenie 5.4 mówi o związku między jednorodnością składki $H_{(u,\mu,\nu)}$ dla $X \in \mathcal{X}^{(2)}_{[0,\infty)}$ (wyznaczona jest funkcja użyteczności, dana wzorem (5.47)) a analogiczną własnością dla wszystkich $X \in \mathcal{X}_{[0,\infty)}$. Owszem, zakłada się, że pojemności μ i ν spełniają warunek (5.31), ale potem przeprowadzona jest krótka dyskusja, wykazująca, że ten warunek jest dość naturalny i w szczególności spełniony przez pojemności μ_g i ν_h, pochodzące od funkcji g i h, zniekształcających prawdopodobieństwo. Poza tym pojawia się naturalne założenie (2.15).

Z kolei Rozdział 6 rozprawy jest poświęcony tzw. składkom szwajcarskim i Autor w sposób nowatorski analizuje własności tych składek w modelu oczekiwanej użyteczności rang w warunkach niepewności. Jest to ujęcie całkowicie oryginalne. Przypomnijmy, że składką szwajcarską nazywamy rozwiązanie równania (6.3), tj.

$$u((c-1)H_{(u,c,\mu)}(X)) = \mathbb{E}_\mu[u(cH_{(u,c,\mu)}(X) - X)],$$

gdzie $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i rosnącą spełniającą warunek $u(0) = 0$, μ jest ustaloną pojemnością, a $c \in [0,1]$ jest ustalonym parametrem. P. mgr Wójcik dowodzi (Twierdzenie 6.1), że istnieje dokładnie jedna liczba $H_{(u,c,\mu)}(X)$ spełniająca powyższą równość. Następnie (Twierdzenie 6.2) bada nierówności pomiędzy składkami $H_{(u,c,\mu)}(X)$ i $H_{(v,c,\mu)}(X)$ dla pewnych dwóch funkcji użytecznościu, v. Okazuje się, że $H_{(v,c,\mu)}(X) \leqslant H_{(u,c,\mu)}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja $A : (0,\infty) \to (0,\infty)$, że zachodzi nierówność (6.9). W Twierdzeniu 6.3 Autor podaje warunek równoważny (6.9) (okazuje się, że istnieje wtedy taka funkcja wypukła $\phi : u((-\infty,0)) \to (-\infty,0)$, że spełnione są warunki (6.13) i (6.14)). Twierdzenie 6.4 zawiera warunki równoważne równości składek $H_{(u,c,\mu)}$ i $H_{(v,c,\mu)}$. Jak należałoby się spodziewać, jest to równoważne dodatniej proporcjonalności funkcji u i v. Kończące Rozdział 6 Twierdzenia 6.5 i 6.6 mówią o jednorodności i translatywności składki $H_{(u,c,\mu)}$, w szczególności podany jest kształt funkcji u, dla której odpowiednia własność zachodzi.

2. Organizacja rozprawy.

Praca jest bardzo obszerna, liczy 99 stron. Mogłaby być krótsza, ale jakiekolwiek jej skrócenie nastąpiłoby ze szkodą dla czytelnika.

Rozdział 1 jest wprowadzeniem w zagadnienie. Autor pisze o preferencjach i ich reprezentacjach w warunkach ryzyka (a więc w modelu zakładającym istnienie miary prawdopodobieństwa), jak również w warunkach niepewności (a więc przy założeniu istnienia pojemności, pojęcia ogólniejszego od miary). Przedstawione są również podstawowe sposoby wyceny kontraktów ubezpieczeniowych (przy tym, jak pisałem wyżej, wydaje mi się, że wycena z punktu widzenia klienta powinna być odróżniona wyraźniej od wyceny z punktu widzenia ubezpieczyciela - ten drugi punkt widzenia prowadzi do dalece nietrywialnych rozważań).

W Rozdziale 2 p. mgr Sebastian Wójcik przedstawia

a) definicję i przykłady pojemności,

b) funkcje mierzalne ograniczone względem pojemności,

c) całkę Choqueta i uogólnioną całkę Choqueta z pojemności oraz ich własności.

Chociaż ten rozdział mógłby być pominięty, to jednak Autor zawarł tu zwarty wykład na temat całki Choqueta, a także dyskusję ograniczoności funkcji mierzalnych. Czytelnik może się dowiedzieć, że stosowane później metody są uprawnione i poprawne z matematycznego punktu widzenia. Krótko mówiąc, uważam inicjatywę umieszczenia Rozdziału 2 w rozprawie za uzasadnioną.

Rozdział 3 przynosi kompendium informacji na temat równań i nierówności funkcyjnych, stosowanych w rozprawie. Znajdujemy tu głównie rozważania dotyczące równań Pexidera, ich rozwiązań oraz przedłużania ze zbiorów niepustych, otwartych i spójnych. Są to wyniki Jánosa Aczéla (Twierdzenie 3.1) i szereg wniosków, uzasadnionych przez Autora.

Autor zajmuje się też wybranymi własnościami funkcji wypukłych, a zwłaszcza związku między wypukłością a kształtem podróżniczki (subgradientu) funkcji. Wydaje mi się, że dowody należą do swoistego folkloru, ale dobrze, że Autor je zamieścił.

Ostatni podrozdział Rozdziału 3 traktuje o bardzo ważnym z punktu widzenia metod stosowanych później, pojęciu quasi-odchylenia (quasi-deviation), wprowadzonym przez Zsolta Pálesa i badanym poza tym przez m.in. Zoltana Daróczyego i László Losonczego. Z pojęciem quasi-odchylenia związane jest pojęcie tzw. średniej uwikłanej. Na wagę tego pojęcia w matematyce aktuarialnej zwrócił uwagę Jacek Chudziak. Należy dodać, że recenzowana rozprawa w znacznym stopniu nawiązuje do metod i wyników uzyskanych przez J. Chudziaka, jednocześnie stanowiąc ich istotne uogólnienie.

Rozdział 4 jest zatytułowany „Równoważnik pewności” i zgodnie z tytułem poświęcony jest temu pojęciu. Jak już pisałem wyżej, równoważnik pewności (r.p.) można traktować jak uogólnienie średniej quasiarytmetycznej, generowanej przez funkcję użyteczności. Twierdzenie 4.1 mówi o istnieniu i poprawności określenia. Dalej Autor podaje charakteryzację równości r. p. (pod pewnymi niezbyt krępującymi założeniami). Okazuje się, że równość r.p. dla $X \in \mathcal{X}_I^{(2)}$ jest równoważna równości r.p. dla dowolnych $X \in \mathcal{X}_I$ i równościom (4.13) i (4.14). Dowód tego faktu oparty jest na wykorzystaniu równań funkcyjnych z Rozdziału 3. W drugiej części tego rozdziału Autor zajmuje się rezultatami pochodzącymi od M. Kałuszki i M. Krzeszowca, a dotyczącymi jednorodności składki lub jej translatywności. Okazuje się, że w pracy [38] podano szereg wyników dotyczących tych kwestii w przypadku, gdy mamy do czynienia z funkcjami g i h zniekształcającymi prawdopodobieństwo, niemniej brak tam charakteryzacji podanych własności. P. mgr Sebastian Wójcik uzyskał takie charakteryzacje, wykorzystując Twierdzenia 4.7 i 4.8, pod znacznie słabszym założeniem o funkcjach g i h, zastępując ciągłość warunkiem (4.90).

W Rozdziale 5 Doktorant bada istnienie i jednoznaczność składki zerowej użyteczności. Jest tu pewne nawiązanie do pracy J. Chudziaka [12], gdzie bada się istnienie i jednoznaczność składki dla dowolnej liczby $w \geqslant 0$, aczkolwiek tylko w przypadku $w = 0$ występuje dodatkowy warunek. Tutaj jest on zastąpiony przez (2.15). Mówi o tym Twierdzenie 5.1. Nawiasem mówiąc, przydałaby się jakaś uwaga, co się dzieje w przypadku $w > 0$?

Rozdział 6 w zasadzie omówiłem wcześniej.

Uwagi ogólne.

Praca jest napisana bardzo dobrze, pod względem redakcyjnym wyśmienicie. Pojawiły się u mnie następujące pytania:

A) Czy Autor zastanawiał się nad rozszerzeniem wyników charakteryzujących funkcje u dla składek jednorodnych i translatywnych na przypadek innych, poza rozpatrywanymi, operatorów agregacyjnych (np. całki Sugeno)?

B) Ponawiam pytanie o to, co się dzieje w przypadku dowolnego $w > 0$ ze składką równoważnej użyteczności w teorii skumulowanej perspektywy?

Uwagi szczegółowe.

Zauważyłem kilka literówek, niżej je wypisuję dla informacji Autora.

1) Str. 18, w. 12 od dołu: powinno być (2.13).

2) Str. 18, w. 4 od dołu: powinno być „jest”.

3) Str. 39, w. 7 od góry: nie rozumiem co znaczy „(3.19) – (3.21)”.

4) Str. 58, w. 7 od góry: powinno być $\mathcal{X}_{[0,\infty)}$.

Podsumowanie.

Biorąc pod uwagę szczegółową analizę dotychczasowego dorobku matematycznego w tej dziedzinie, a także doceniając samodzielne dokonania p. mgr. Sebastiana Wójcika, **uważam, że praca pt. „Zastosowania równań i nierówności funkcyjnych w teorii użyteczności” autorstwa p. magistra Sebastiana Wójcika w pełni odpowiada wymogom ustawowym i zwyczajowym stawianym pracom doktorskim** i wnioskuję o dopuszczenie p. mgr. Wójcika do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Ponadto, proponuję by opiniowaną rozprawę wyróżnić.

Maciej Sablik