dr hab. Mariusz Skałba, prof. UW
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski
e-mail: skalba@mimuw.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Sebastiana Wójcika *Zastosowania równań i nierówności funkcyjnych w teorii użyteczności*

Praca przedstawiona przez mgr Wójcika dotyczy teorii użyteczności. Teoria ta ma charakter wybitnie interdyscyplinarny i wynika to głównie z rozległości motywacji z których czerpie. Podstawowym paradygmatem w mikroekonomii jest pojęcie *wyboru*. Z nim jako takim związane są ściśle pojęcia: zbioru dostępnych alternatyw i określonej na nim relacji preferencji. Z metodologicznego punktu widzenia najwygodniejsza jest sytuacja, gdy alternatywy dadzą się zaetykietować liczbami rzeczywistymi w ten sposób, że ta opcja otrzyma większą liczbę, która jest dla decydenta lepsza. Klasyczna teoria wyboru w warunkach niepewności została stworzona w latach 40-tych przez (m.in.) von Neumanna i Morgensterna. O funkcji użyteczności Bernoulliego zakłada się na ogół, że jest wklęsła, co formalizuje i kwantyfikuje zjawisko awersji do ryzyka. W ramach tego niezwykle atrakcyjnego modelu decydent wybiera z dostępnych loterii tę o największej wartości oczekiwanej użyteczności. Model użyteczności oczekiwanej stosowany jest powszechnie w matematyce finansowej i aktuarialnej do modelowania zdarzeń na rynkach kapitałowych i do zarządzania finansami firm ubezpieczeniowych.

Z poznawczego punktu widzenia teoria użyteczności oczekiwanej nie była jednak ostatnim słowem. Już w latach 50-tych pojawiły się słynne paradoksy Allais i Ellsberga. Najbardziej uznaną formą modyfikacji teorii użyteczności oczekiwanej jest teoria behawioralna pochodząca od psychologów Tverskiego i Kahnemana (teoria perspektywy). Wychodzi ona z obserwacji empirycznych, że często decydenci postrzegają nieracjonalnie możliwości zajścia zdarzeń zarówno mało prawdopodobnych, jak i bardzo prawdopodobnych. Matematycznym wyrazem potrzebnych modyfikacji są tzw. funkcje zaburzające prawdopodobieństwo. Jeśli zdecydujemy się na osobne funkcje modyfikujące dla skrajnych centyli to odpowiednikiem zwykłej wartości oczekiwanej będzie *uogólniona całka Choqueta*.

I właśnie całka Choqueta jest głównym narzędziem matematycznym w przedstawionej dysertacji. Jak pisze sam doktorant zasadnicze wyniki zawarte są w rozdziałach 4-6, a początkowe trzy rozdziały mają charakter przygotowawczy. Rozdział I zawiera rys historyczny teorii użyteczności oraz podstawowe definicje różnych składek ubezpieczeniowych. Rozdział II poświęcony jest przedstawieniu tych własności całki Choqueta, które znajdą zastosowanie w rozdziałach kolejnych. Rozdział III jest kluczowy dla dalszej oryginalnej części pracy. Przedstawiono w nim teorię odpowiednich równań funkcyjnych (równanie Pexidera), nierówności związane z funkcjami wypukłymi oraz teorię średnich uwikłanych.

W kolejnych rozdziałach autor prezentuje wyniki dotyczące istnienia, jednoznaczności i charakteryzacji różnych typów podstawowych składek ubezpieczeniowych. Definicje tych składek wywiedzione są w ramach modelu behawioralnego. Każdorazowo pojawia się fundamentalny problem istnienia i ściśle z nim związany problem jednoznaczności składki. Odpowiednie warunki dostateczne dla istnienia i jednoznaczności rozważanych składek podane są przy bardzo ogólnych (czyli słabych) założeniach dotyczących modelu – to oczywiście zaleta podejścia wybranego przez doktoranta.

Składka ubezpieczeniowa (czyli wycena ryzyka) jest przyporządkowaniem ryzyku finansowemu pewnej liczby. Pożądane jest, aby takie przyporządkowanie miało szereg naturalnych własności typu: jednorodność, translacyjność, (pod)addytywność i inne. Okazuje się dość szybko, że żadna z popularnych składek nie ma wszystkich pożądanych własności, ale każdorazowo warto zbadać dla jakiego nastawienia do ryzyka rozważana własność zachodzi. Pan Wójcik uzyskuje tutaj ciekawe i nowatorskie rezultaty. Ograniczymy się do przedstawienia odpowiednich wyników z rozdziału 6, które dotyczą składki szwajcarskiej. Jest to o tyle uzasadnione, że składka szwajcarska jako jednoparametrowa rodzina schematów składek obejmuje jako szczególne przypadki *składkę wartości średniej* (dla $c = 0$) oraz *składkę zerowej użyteczności* (dla $c = 1$), a im poświęcono osobne rozdziały 4 i 5. Rozdział 6 poświęcony jest zbadaniu „generycznego" przypadku składki szwajcarskiej tzn. w całym rozdziale zakłada się, że $c \in (0, 1)$. W Tw.6.1 autor dowodzi przy pewnych naturalnych założeniach, że istnieje dokładnie jedna liczba $H_{(u,c,\mu)}(X)$ spełniająca równanie

$$u((c-1)H_{(u,c,\mu)}(X)) = E_\mu[u(cH_{(u,c,\mu)}(X) - X)],$$

gdzie X jest wycenianym nieujemnym ryzykiem, u funkcją użyteczności majątku, $c \in (0, 1)$ parametrem składki szwajcarskiej, μ ustaloną pojemnością, i wreszcie E_μ odpowiadającą jej całką Choqueta. Właśnie ta liczba $H_{(u,c,\mu)}(X)$ nazywa się składką szwajcarską.

Kolejne Tw.6.2 dotyczy porównywania dwóch składek szwajcarskich z tym samym parametrem c, ale z różnymi funkcjami użyteczności u, v. Aby niezależnie od wycenianego ryzyka X zachodziła nierówność

$$H_{(u,c,\mu)}(X) \geq H_{(v,c,\mu)}(X)$$

potrzeba i wystarcza, aby funkcje u, v spełniały następujący warunek:
istnieje taka funkcja $A : (0, \infty) \to (0, \infty)$, *że*

$$v(ct - t) - v(ct - x) \leq A(t)[u(ct - t) - u(ct - x)], \text{ dla } x, t \in (0, \infty).$$

Dowód jest trudny i korzysta istotnie i nietrywialnie z teorii quasi-odchyleń i własności średnich uwikłanych rozwiniętych w rozdziale III - kluczowe jest tutaj powołanie się na Tw.3.3 o specjalnych nierównościach funkcyjnych. W Tw.6.3 powyższy warunek został trochę przeformułowany w ten sposób, że v jawi się jako uwypuklenie funkcji u i spełniona jest nierówność 6.14, której tu nie reprodukujemy. Nadmienimy tylko, że jest ona odpowiednikiem nierówności dla klasycznych współczynników awersji do ryzyka Arrowa-Pratta. Potem następuje piękny przykład 6.4, gdzie autor rozstrzyga całkowicie explicite problem *kto się boi bardziej* dla funkcji użyteczności typu

$$u(x) = \begin{cases} -\alpha(-x)^r \text{ dla } x \in (-\infty, 0] \\ x^r \text{ dla } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

oraz

$$v(x) = \begin{cases} -\beta(-x)^s \text{ dla } x \in (-\infty, 0] \\ x^s \text{ dla } x \in (0, \infty), \end{cases}$$

gdzie $\alpha, \beta, r, s \in (0, \infty)$. Mianowicie, na mocy tw.6.2 i 6.3 decydent z funkcją użyteczności u boi się bardziej niż decydent z funkcją użyteczności v, tzn. skłonny jest zapłacić większą składkę za wyceniane ryzyka, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi nierówność

$$\frac{r}{s} \geq \max\left\{1, \frac{\alpha\beta + \beta(\frac{1-c}{c})^{-r}}{\alpha\beta + \alpha(\frac{1-c}{c})^{-s}}\right\}.$$

Kolejne Tw. 6.4 jest mniej spektakularne niż powyższa nierówność, ale całkowicie rozstrzyga problem, kiedy dwaj decydenci u i v mają to samo nastawienie do ryzyka w tym sensie, że zawsze są skłonni zapłacić tyle samo za jego uniknięcie. Dokładniej, przy pewnych naturalnych założeniach, zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\alpha \in (0, \infty)$, takie, że

$$v(x) = \alpha u(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Wreszcie w twierdzeniach 6.5 i 6.6, wieńczących badania własności składki szwajcarskiej (i całą dysertację) autor charakteryzuje te nastawienia do ryzyka (via funkcja użteczności u) dla których zachodzą (odpowiednio) własności dodatniej jednorodności oraz translacyjności. Nie wnikając w szczegóły zasygnalizujemy tylko, że przy pewnych naturalnych założeniach dodatnia jednorodność charakteryzuje przed chwilą rozważaną rodzinę funkcji użyteczności z przykładu 6.4 (typu Tverskiego-Kahnemana), a translacyjność charakteryzuje rodziny użyteczności wykładniczych i liniowych.

Uważam, że wyniki przedstawione przez doktoranta w rozdziale 6 są interesujące i stanowią wartościowy przyczynek do teorii wyceny kontraktów ubezpieczeniowych w behawioralnych modelach podejmowania decyzji. W całej dysertacji doktorant sprawnie posługuje się metodami równań i nierówności funkcyjnych. Wśród nich bardzo istotną rolę odgrywa metoda quasi-odchyleń i średnich uwikłanych. Jest to stosunkowo nowa metoda w analizie wypukłej i pan Wójcik swobodnie ją adaptuje do swoich potrzeb – zasługuje to na docenienie.

Praca napisana jest w przejrzysty, uporządkowany i celowy sposób. W pierwszych trzech rozdziałach wprowadzono pojęcia i przytoczono twierdzenia, które są potem intensywnie wykorzystywane w dalszych oryginalnych badaniach doktoranta.

Przed konkluzją warto podkreślić, że badania i wyniki doktoranta wpisują się w bogatą tradycję badań nad równaniami funkcyjnymi i ich zastosowaniami, kultywowaną w Polsce (m.in.) przez Chudziaka, Kałuszkę, Krzeszowca i Heilperna. Wymienieni autorzy publikują swoje prace w najlepszych profesjonalnych czasopismach międzynarodowych. Światowym klasykiem w dziedzinie równań i nierówności funkcyjnych był zresztą profesor Marek Kuczma (obok Aczela). To wszystko jest pośrednią gwarancją, że również przyszłe wysiłki badawcze pana Wójcika będą uwieńczone nowymi ciekawymi rezultatami.

Nie mam wątpliwości, że dysertacja przedstawiona przez doktoranta spełnia wszystkie wymogi formalne stawiane przed pracami doktorskimi. Z przekonaniem wnoszę o dopuszczenie mgr Sebastiana Wójcika do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Mariusz Skałba