dr hab. Justyna Jarczyk, prof. UZ
Instytut Matematyki
Uniwersytet Zielonogórski

Zielona Góra, 6 października 2022 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej

mgra Sebastiana Wójcika

pt. *Zastosowania równań i nierówności funkcyjnych w teorii użyteczności*

Przedstawiona praca doktorska pana Sebastiana Wójcika została napisana pod kierunkiem dra hab. Jacka Chudziaka, pracownika Uniwersytetu Rzeszowskiego. Jest to praca interdyscyplinarna, w której zagadnienia i problemy ekonomiczne opisywane i rozwiązywane są przy pomocy narzędzi matematycznych. Ekonomiczne pojęcie użyteczności powstało na przełomie XVIII i XIX wieku i po raz pierwszy zostało aksjomatycznie opisane w monografii Johna von Neumana i Oskara Morgensterna z 1944 roku. Od tego czasu teoria ta jest przedmiotem badań i modyfikacji klasycznego modelu, poprzez dostosowanie go do wyników otrzymanych w sposób eksperymentalny. Powstał opis tzw. behawioralnych modeli podejmowania decyzji w warunkach ryzyka i niepewności. W pracy doktorskiej autor charakteryzuje własności składek ubezpieczeniowych w tych modelach używając teorii funkcji wypukłych, średnich uwikłanych, równań funkcyjnych oraz całki Choqueta.

Dysertacja składa się z 6 rozdziałów i liczy 99 stron. Pierwsze trzy rozdziały to wprowadzenie czytelnika w tematykę rozprawy, przedstawienie twierdzeń i faktów niezbędnych do uzasadnienia otrzymanych przez autora nowych wyników. Te ostatnie które umieszczone zostały w trzech końcowych częściach pracy.

W rozdziale pierwszym autor przedstawił charakterystykę istniejących koncepcji użyteczności oraz funkcji użyteczności z niektórymi zastosowaniami ekonomicznymi i ze szczególnym uwzględnieniem praktyki ubezpieczeniowej. Rozważono pewne problemy decyzyjne ubezpieczającego się i ubezpieczyciela w kontekście określonych założeń funkcji użyteczności. Autor przedstawia najważniejsze metody wyceny kontraktów ubezpieczeniowych w warunkach ryzyka oparte na funkcji użyteczności.

W rozdziale drugim autor przypomina definicję całki Choqueta, pewne jej uogólnienia oraz własności. Autor podaje tu także definicję i przykłady pojemności.

Kolejny rozdział poświęcony jest równaniom funkcyjnym ze szczególnym uwzględnieniem równań Pexidera, funkcjom wypukłym i średnim uwikłanym. Zgromadzenie wszystkich wyników niezbędnych w dalszych badaniach oraz ujednolicenie oznaczeń znacznie wpływa na komfort czytania dalszych części rozprawy.

Kolejne trzy części to rozdziały kluczowe tej rozprawy. W rozdziale czwartym autor wprowadza i bada własności równoważnika pewności (4.2) [zgodnie z numeracją w pracy] generowanego przez uogólnioną całkę Choqueta względem pary pojemności i ściśle z nim związanej składki wartości średniej (4.58). Przedstawia związek między tymi dwoma pojęciami (Lemat 4.2). Uzasadnia, że pewnik równoważności zdefiniowany wzorem (4.2) jest poprawnie określony (por. Tw. 4.1). Charakteryzuje tu równość równoważników pewności (Tw. 4.2) oraz udowadnia twierdzenia dotyczące charakteryzacji dodatniej jednorodności (por. Twierdzenia

4.3 i 4.4) i translacyjności (por. Tw. 4.5). Te same własności rozpatruje dla składki wartości średniej definiowanej za pomocą wzoru (4.58): (Uwaga 4.3, Tw. 4.7 oraz Tw. 4.8). Przy słabszych założeniach regularnościowych autor otrzymuje tezy analogiczne do tych otrzymanych w pracy [38] autorstwa M. Kałuszki i M. Krzeszowca z 2013 r. (por. Wnioski 4.2 i 4.3).

W rozdziale piątym autor rozważa składkę zerowej użyteczności (5.2) w teorii skumulowanej perspektywy w warunkach niepewności. Charakteryzuje te pary pojemności, przy których składka zdefiniowana wzorem (5.2) jest wyznaczona jednoznacznie (por. Tw. 5.2). Ponadto autor charakteryzuje porównywalność składek zerowej użyteczności (por. Tw. 5.2 i 5.3), co w istotny sposób uzupełnia badania prowadzone J. Chudziaka i przedstawione w artykule [10]. Pan S. Wójcik przedstawia także rozwiązanie problemu dodatniej jednorodności (por. Tw. 5.4) i dodatniej translatywności (por. Uwaga 5.3) tej składki.

W ostatniej części pracy autor rozważa problemy dotyczące własności składki szwajcarskiej (por. (6.3)) w modelu oczekiwanej użyteczności rang w warunkach niepewności. Podobnie jak w poprzednim rozdziale autor rozpoczyna od uzasadnienia, że składka określona warunkiem (6.3) jest jednoznacznie wyznaczona (por. Tw. 6.1) a następnie przechodzi do rozwiązania problemu porównywania składek tego typu (por. Tw. 6.2 i 6.4). Ponieważ tak zdefiniowana składka szwajcarska jest określona w sposób uwikłany, to podaje także pewne szczególne przypadki, w których możemy składkę tę wyznaczyć w postaci jawnej (por. Przykłady 6.1 i 6.2).

Problemy ekonomiczne, związane z teorią ubezpieczeń, przedstawione w rozdziałach 3-5 zapisane w języku matematycznym w istocie stanowią od początku problemy z zakresu teorii równań i nierówności funkcyjnych.

Formalna redakcja pracy nie budzi żadnych zastrzeżeń. Na uwagę zasługuje fakt, że prawie wszystkie twierdzenia, czy uwagi są w pracy udowodnione z dużą starannością i dbałością o szczegóły. Dowody są przeważnie techniczne, niemniej jednak wymagają dobrej orientacji w zakresie szeroko rozumianej analizy matematycznej, teorii całki, równań funkcyjnych, a także matematyki finansowo-ubezpieczeniowej. Układ pracy jest dobrze przemyślany. Wyniki uzyskane przez pana mgra Sebastiana Wójcika są ciekawe i wartościowe. Pokazują, że doktorant posiada umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej.

Poniżej przestawiam kilka uwag dotyczących recenzowanej rozprawy.

1. Uważam, że doktorant na początku każdego rozdziału, powinien wyraźnie zaznaczyć, które wyniki są jego autorstwa lub współautorstwa.

2. Ponieważ w literaturze terminologia związana z monotonicznością funkcji nie jest precyzyjnie ustalona i można pojęcie funkcji rosnącej rozumieć co najmniej na dwa sposoby, to uważam, że w pracy powinna być podana definicja funkcji rosnącej, do której autor się odnosi. (por. Lemat 3.2)

3. Funkcja g określona wzorem na stronie 6 powinna być zdefiniowana w zerze osobną równością.

4. W Uwadze 2.6 str. 21[6] powinno być "$\ldots - \inf\{t \in \mathbb{R} : \mu(\{X > t\}) = 0\} = -(\mu - \operatorname{ess\,sup} X)$" zamiast "$\ldots - \inf\{t \in \mathbb{R} : \mu(\{X > t\}) = 0\} = -(\mu - \operatorname{ess\,inf} X)$".

5. We Wniosku 3.1 występuje drobny konflikt oznaczeń. Liczba a w założeniach wniosku jest ustaloną liczbą z przedziału $(-\infty, 0]$ natomiast w tezie jest dodatnim parametrem.

6. W Twierdzeniu 4.6 tezy (i) i (ii) brzmią tak samo. Wzór (4.63) powinien być określony dla $X \in \mathcal{X}_{[0,\infty)}$.

7. Prawidłowe cytowanie literatury zawsze poprawia komfort czytania pracy. W dowodzie Lematu 3.4 autor deklaruje, że korzysta ze wskazówki zawartej w monografii [43, s.196]. Niestety w Bibliografii pod numerem [43] cytowana jest książka: M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, PWN Warszawa-Kraków-Katowice, (1985), 358-361. Wspomniana przez autora wskazówka znajduje się w opisanym przez niego miejscu w drugiej edycji tej monografii a mianowicie: M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, second edition, edited by Attila Gilányi, Birkhäuser Verlag AG, Basel-Boston-Berlin, (2009).

8. W dowodzie Twierdzenia 4.3 na str. 52_{10} należy odwołać się do wzorów (4.33)-(4.36) zamiast (4.53)-(4.36).

9. Na str. 5_{15} należy odwołać się do wzoru (1.5) zamiast (1.7).

10. W całej pracy dobrze jest posługiwać się tymi samymi oznaczeniami. Zapisy "ess sup" i "$ess\,sup$" są niekonsekwentne.

11. Numerowanie wzorów na które autor nie powołuje się w dalszej części pracy jest zabiegiem dla mnie niejasnym i utrudniającym czytanie rozprawy. Wzory (1.2), (1.3), (1.4), (1.6), (1.7),(1.10), (1.11), (2.5), (2.6), (2.9), (2.10) .... powinny pozostać bez numeracji.

12. Przy tak dużej liczbie twierdzeń, lematów, wniosków i uwag, wspólna numeracja uczyniłaby pracę przejrzystszą.

Powyższe uwagi nie wpływają jednak na zawartość merytoryczną pracy.

Konkluzja

W mojej ocenie omawiana tu rozprawa doktorska pana Sebastiana Wójcika pt. „Zastosowania równań i nierówności funkcyjnych w teorii użyteczności" spełnia zarówno wymagania zwyczajowe, jak i te stawiane pracom doktorskim przez ustawę z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. 2021 poz. 478 z późn. zm.). Uważam, że rozprawa zawiera oryginalne rozwiązania nowych problemów matematyczno-ekonomicznych. Po zapoznaniu się z rozprawą jestem przekonana, że jej Autor opanował wiedzę teoretyczną i metody badawcze niezbędne do samodzielnego prowadzenia badań naukowych. Wnoszę więc o dopuszczenie pana Sebastiana Wójcika do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora w dyscyplinie matematyka.